

Espectros de Sistemas Quânticos Não-Hermitianos e a Simetria P.T. João Rafael Lucio dos Santos, Álvaro de Souza Dutra – Bacharelado em Física - Departamento de Física e Química – Faculdade de Engenharia – Campus de Guaratinguetá.

Partindo de lagrangianas que convencionalmente representam sistemas mecânicos conhecidos como, por exemplo, o oscilador harmônico clássico; procuramos outras lagrangianas que apresentem a mesma equação de movimento que tais sistemas, apesar de possuírem expressões distintas das lagrangianas inicialmente citadas. Por conta deste fato, podemos dizer que ambas são classicamente equivalentes. Mas há dúvidas quanto a validade desta equivalência para a mecânica quântica. Dentre as análises a respeito destas lagrangianas, iremos expor o caso de uma hamiltoniana não-hermitiana e procuraremos soluções reais para este problema. Além disso, daremos continuidade ao tratamento de problemas envolvendo hamiltonianas que possuem dependência temporal, ou seja, hamiltonianas que na mecânica quântica caem em equações de Schrödinger dependentes do tempo.

Em nosso projeto abordamos as lagrangianas

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + fx \text{ e } L' = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - fxt,$$

que possuem equivalência clássica. Sendo

$$H = \frac{p^2}{2m} - fx \text{ e } H' = \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} + \frac{ft}{m} \right)^2,$$

seus respectivos hamiltonianos. Estes operadores foram aplicados à equação de Schrödinger e as funções de onda obtidas para cada hamiltoniana foram

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar} \text{ e } \Psi(x, t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar} e^{\alpha x}$$

onde $\alpha(t) = -ift/\hbar$. Estendemos este estudo procurando soluções reais para o operador não-hermitiano

$$H = \frac{p^2}{2m} - (\omega^2 x + imf)pt.$$

Observamos que este operador possui um problema de ordenamento, para eliminar este fator devemos reescrevê-lo como

$$H = \frac{p^2}{2m} - imfpt - \frac{1}{2\alpha} [px + (\alpha - 1)]\omega^2 t.$$

Desta maneira a equação de Schrödinger para este operador é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \left(m\hbar ft + \frac{\omega^2 \hbar tx}{2i} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\omega^2 \hbar t}{2i\alpha} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Como o potencial considerado possui uma dependência temporal, utilizamos diversos métodos para que pudéssemos dispor de uma equação solúvel e que possuíse espectro real, uma vez que, o hamiltoniano possui quebra de hermiticidade. Uma de nossas considerações foi a mudança de variáveis

$\Psi(x, t) = e^{g(x, t)} \varphi(x, t)$. Ela nos conduziu a

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\varphi \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varphi \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \right] - \left(m\hbar ft + \frac{\omega^2 \hbar tx}{2i} + \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ & - \left(m\hbar ft + \frac{\omega^2 \hbar tx}{2i} \right) \varphi \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\omega^2 \hbar t}{2i\alpha} \varphi = i\hbar \left(\varphi \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Da qual determinamos que

$$g(x, t) = -\frac{m^2 f t x}{\hbar} - \frac{m \omega^2 t x^2}{4 i \hbar} + C(t).$$

Em seguida consideramos as definições

$$x + \frac{2 i m f}{\omega^2} = \tilde{x} \text{ e } \bar{\omega}^2(t) = \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^4 t^2}{4}$$

e calculamos

$$C(t) = \frac{m^3 f^2 t}{i \hbar} + \frac{(2 - \alpha) \omega^2 t^2}{8 \alpha}$$

que é o valor da constante de integração. Agora nossa equação diferencial inicial passou a ser

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{m \bar{\omega}^2}{2} \varphi = i \hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Para resolver esta ultima expressão redefinimos a parte espacial e temporal na tentativa de buscar uma equação semelhante a do oscilador harmônico com frequência constante (Dutra, A.de Souza, de Castro, A.Souares *On the Quantum Hamilton-Jacobi Formalism*, Foundations of Physics vol 21, no. 6, 1991). Tais redefinições foram

$$\tilde{x} = s(\tau) \bar{x} \text{ e } \frac{\partial \tau}{\partial t} = \mu(t),$$

alem de

$$\phi(\bar{x}, \tau) = \varphi[\tilde{x}(\bar{x}, \tau), t(\bar{x}, \tau)] \text{ e } \phi(\bar{x}, \tau) = e^{i f(\bar{x}, \tau)} \chi(\bar{x}, \tau).$$

Desta vez nossa equação diferencial foi escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2} m s^4 (\bar{\omega}^2 + \gamma^2) \bar{x}^2 \chi = i \hbar \mu s^2 \frac{\partial \chi}{\partial \tau},$$

onde

$$\gamma^2 = \frac{\mu}{s^2} \frac{d(\mu s s')}{d\tau} - \frac{\mu^2 s'^2}{s^2}.$$

Para uma dada constante Ω^2 definida por $\Omega^2 = s^4 (\bar{\omega}^2 + \gamma^2)$ e estabelecendo um vínculo entre μ e s^2 dado por $s^2 \mu = 1$, obtivemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2} m \Omega^2 \bar{x}^2 \chi = i \hbar \frac{\partial \chi}{\partial \tau}.$$

Esta expressão trata-se exatamente da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico simples, e pode ser facilmente resolvida. Voltaremos nossa atenção para a expressão de χ e aplicamos a ela o vínculo citado anteriormente. Para isto, primeiramente substituímos

$$s(\tau) = \frac{1}{v}.$$

Aplicando isto a χ temos que

$$v'' = -\frac{\gamma^2}{v^3}.$$

Deste ponto em diante, procuramos resolvê-la e a partir destes resultados determinamos S , μ e γ^2 . Devemos ter em vista que a partir de μ podemos calcular os valores de τ que satisfazem Ω^2 e assim encontramos

$$\bar{\omega}_{n_1}^2 = \Omega^2 \left[\left(\frac{2}{n_1 + 2} \right) \frac{(2n_1)^{1/2}}{\sigma_0 t} \right]^{\frac{-16}{2+n_1}} - \frac{2n_1}{(2-n_1)^2 t^2}$$

para $n_1 \neq 2$.

Com $n_1 = 2$

$$\bar{\omega}_2^2 = 16\Omega^2 e^{2\sigma_0 t} - \sigma_0^2.$$

Outra classe de soluções obtida foi

$$\bar{\omega}_{n_2}^2 = \Omega^2 \left[\left(\frac{2}{n_2 - 2} \right) \frac{(2n_2)^{1/2}}{\sigma} \right]^{\frac{-15}{2-n_2}} + \frac{2n_2}{(2+n_2)^2 t^2}$$

para $n_2 \neq 2$. Quando $n_2 = 2$, e $\sigma_0 \in \mathfrak{R}$

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\Omega^2}{a^8 \cos^8 \left[tg^{-1} (a^2 \sigma_0 t) \right]} - \sigma_0^2 a^4 \cos^4 \left[tg^{-1} (a^2 \sigma_0 t) \right].$$

Em nossas considerações finais sobre as lagrangianas equivalentes, encontramos duas funções de onda distintas para L e L' , o que nos levou a concluir que no caso abordado ambas não possuem

equivalência quântica, uma vez que, elas estão defasadas de um fator, $e^{-\left(\frac{if}{\hbar}\right)tx}$ e tal defasagem pode ser constatada, por exemplo, em um experimento de fenda dupla. Um fato interessante é que embora elas não sejam quanticamente equivalentes, suas densidades de probabilidade são idênticas, bem como seus vetores densidade de partículas. Este estudo pode ser aplicado a outras Lagrangianas que possuem equivalência clássica e a operadores hamiltonianos hermitianos e não-hermitianos.

Outro aspecto abordado neste trabalho foi a familiarização do conceito de operadores, sendo que, partimos desde os primeiros princípios deste assunto e verificamos como é possível utilizar algumas de suas propriedades para construir uma estrutura capaz de simplificar o processo de resolução de determinadas equações diferenciais.

Concluímos também que é possível encontrar soluções reais para a hamiltoniana não-hermitiana respeitando os vínculos que foram estabelecidos, resolvendo a equação do tipo equação de Schrödinger para o oscilador harmônico simples e escrevendo a função $\Psi(x, t)$ em termos das diversas definições e considerações que foram realizadas ao longo deste estudo.

O método utilizado para solucionar o problema da hamiltoniana não-hermitiana nos obrigou a fazer uma série de definições a respeito da função de onda $\Psi(x, t)$, tais definições recaíram em diversas funções e constantes que contribuiriam para um possível cálculo da densidade de probabilidade de $\Psi(x, t)$.

Ilustramos também diversos métodos para encontrar soluções reais para problemas que envolvam hamiltonianas com dependência temporal. Estes métodos podem ser estendidos para problemas envolvendo Hamiltonianas cuja massa também é dada em função do tempo.

Bolsa: CNPq/PIBIC